Dynamic Programming

am Beispiel des Rucksackproblems

Problemstellung: Ein Rucksack habe ein Fassungsvermögen von K. Welche Items (Wert v_i , Gewicht w_i) sollte man einpacken, damit der Gesamtwert aller Gegenstände im Rucksack **maximal** wird?

Beispiel:

Mathematische Formulierung:

Maximiere $V = 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 7x_4 + 10x_5 + 13x_6 + 10x_7$ (V = Gesamtwert)

unter der Bedingung $G = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 8x_6 + 5x_7 \leq 10$ (W = Gesamtgewicht)

mit $x_i \in \{0, 1\}$ $i \in \{1, 2, \dots 7\}$

Die Lösung ist hier: $\vec{x} = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1)$ mit V = 20 und W = 10

Ein **Brute Force** Algorithmus müsste sämtliche Teilmengen überprüfen, d.h. 2^7 Lösungen.

Allgemein: n Items, mögliche Teilmengen: 2^n

Dynamic Programming:

Löse das Optimierungsproblem durch **Aufteilung in Teilprobleme** und systematische **Speicherung von Zwischenresultaten**.

Hier:

Löse das Problem für **null** Items und Kapazität **0**
Löse das Problem für **null** Items und Kapazität **1**
Löse das Problem für **null** Items und Kapazität **2**
…
Löse das Problem für **null** Items und Kapazität **10**

Löse das Problem für **ein** Item und Kapazität **0**
Löse das Problem für **ein** Item und Kapazität **1**
…
Löse das Problem für **ein** Item und Kapazität **10**
…

Löse das Problem für **zwei** Items und Kapazität **0**
Löse das Problem für **zwei** Items und Kapazität **1**
…
Löse das Problem für **zwei** Items und Kapazität **10**
…
Löse das Problem für **sieben** Items und Kapazität **9**
Löse das Problem für **sieben** Items und Kapazität **10**

Übungen

a)

5 €	6 €	3 €
4 kg	5 kg	2 kg
Item 1	*Item 2*	*Item 3*

Rucksack fasst **9 kg**

mathematisch:

Maximiere $5x_1 + 6x_2 + 3x_3$

Bedingung $4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 9$ mit $x_i \in \{0, 1\}$ $i \in \{1, 2, 3\}$

Item / Capacity	0	1 $v_1 =$ $w_1 =$	2 $v_2 =$ $w_2 =$	3 $v_3 =$ $w_3 =$
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				

Auszuwählen sind die Items _____ ,
der Gesamtwert der Items im Rucksack beträgt dann: _____

b) Maximiere $16x_1 + 19x_2 + 23x_3 + 28x_4$

Bedingung $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 7$ mit $x_i \in \{0, 1\}$ $i \in \{1 \ldots 7\}$

Capacity \ Item	0	1 $v_1 =$ $w_1 =$	2 $v_2 =$ $w_2 =$	3 $v_3 =$ $w_3 =$	4 $v_4 =$ $w_4 =$
0					
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					

Auszuwählen sind die Items _____ ,
der Gesamtwert der Items im Rucksack beträgt dann: _____

c) Schreibe zwei Computerprogramme, die die im Kursweb hinterlegten Rucksack-Probleme lösen.
Programm 1: Greedy-Ansatz "Items mit höchster Wertdichte zuerst"
Programm 2: Dynamic Programming

Aufbau der Dateien (z.B. "ks_4_0"):

```
4 11          # Anzahl der Items in der Datei, Kapazität des Rücksacks
8 4           # Item 1: Wert, Gewicht
10 5          # Item 2…
15 8
4 3
```

Ausgabe deines Programms:

```
19            # Gesamtwert der augew. Items
0 0 1 1       # Lösungvektor (hier: Item 3 und 4 werden ausgewählt)
```